Test du 16 Novembre 2017 - Corrigé

Exercice 1. Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
(1) Soit $f(\mathbf{x}) = 1/r$. Calculer $\operatorname{grad} f$, Δf et $\operatorname{div} f$.
(2) Soit $f(\mathbf{x}) = \varphi(r)$ où φ est une fonction réelle régulière.
(a) Montrer que pour $\mathbf{x} \neq 0$

$$\Delta f = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r).$$

(b) En déduire une solution de $\Delta f = 0$ dans $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Corrigé. (1) Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-1}) = -r^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}(r) = -\frac{x_i}{r^3}$$

Donc

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r^3}(x_1, \ldots, x_n) = \boxed{-\frac{1}{r^3}\mathbf{x}},$$

et

$$\operatorname{div} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{r^3} = \boxed{-\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{e}\rangle}{r^3}}$$

où $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \cdots \mathbf{e}_n$.

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{x_i}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} - x_i\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\partial}{\partial x_i}(r)\right) \\
&= = \frac{1}{r^5}\left(3x_i^2 - r^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^5}\left(3x_i^2 - r^2\right) = \boxed{\frac{3-n}{r^3}}$$

(2) Soit $f = \varphi(r)$
(a) Pour $\mathbf{x} \neq 0$, on a $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = \varphi'(r)\frac{x_i}{r}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \varphi''(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} + \varphi'(r)\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i r^{-1}) \\
&= \varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - x_i\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \\
&= \varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\varphi''(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \varphi'(r) \left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} 1 - \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \right] \\
&= \varphi''(r) + \varphi'(r) \left[\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right] \\
&= \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r)
\end{aligned}$$

(b) Si $n = 1$ le problème est trivial. On suppose $n \geq 2$. On cherche une solution de $\Delta f = 0$, alors $\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = 0$ et $\varphi'(r) = r^{1-n}$. D'où

$$\boxed{\varphi(r) = \begin{cases} \ln r & si\ n = 2 \\ \frac{r^{2-n}}{2-n} & si\ n \geq 3 \end{cases}}$$

Exercice 2. Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

avec $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$, .

(1) Faire un dessin de Ω

(2) Calculer le volume de Ω.

Notons Σ le bord de Ω orienté suivant le vecteur normal extérieur.

Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On peut paramétrer Σ_1 par

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) & = \sin\varphi \cos\theta \\ y(\varphi, \theta) & = \sin\varphi \sin\theta \\ z(\varphi, \theta) & = \cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi, \theta) \in [0, \pi/2]^2.$$

Notons aussi $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ (le complémentaire de Σ_1 dans Σ).

Soit le champ vectoriel donné par

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$$

(3) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_1.

(4) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_2.

(5) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ en utilisante la formule d'Ostrogradsky (théorème de divergence). Calculer d'abord la divergence de $\mathbf{f}$.

(6) Calculer l'aire de Σ_1.

(7) Calculer l'aire de Σ_2.

(8) Soit la courbe C, bord de Σ_1, orientée dans le sens trigonométrique par rapport à l'orientation de Σ_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur).

En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C.

On rappelle que le volume de la boule unité est $4\pi/3$ et que l'aire de la sphère unité est 4π.

Corrigé. (1) Dessin.

(2) Le domaine Ω est l'intersection de la boule unité d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et de l'octant $\{(x, y, z),\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. C'est le huitième de la boule unité qui se trouve dans cet octant. Son volume est donc

$$\boxed{Vol(\Omega) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}}.$$

(3) Le bord de Ω est composé huitième de la sphère unité : $\Sigma_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et des quarts de disques $S_1 = \{z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$, $S_2 = \{x = 0,\ z^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0, y \geq 0\}$ et $S_3 = \{y = 0,\ x^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0, z \geq 0\}$. On a alors $\Sigma = \Sigma_1 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et $\Sigma_2 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

On paramètre Σ_1 *par*

$$\sigma(\varphi,\theta)=\begin{cases} x(\varphi,\theta) &= \sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) &= \sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) &= \cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi,\theta)\in[0,\pi/2]^2.$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} &= (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)\\ \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} &= (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi)$$

est un vecteur normal sortant. D'où

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1}\mathbf{f}\cdot dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\mathbf{f}(\sigma(\varphi,\theta))\cdot(\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial\theta})d\varphi d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\varphi\cos^3\theta, \sin^3\varphi\sin^3\theta, \cos^3\varphi)\cdot(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\cos^4\varphi\sin\varphi\; d\varphi d\theta\\ &= \boxed{\frac{3\pi}{10}}\end{aligned}$$

Pour une intégrale du type $\int\sin^5(\varphi)d\varphi$ *on utlise*

$$\int\sin^5(\varphi)d\varphi = \int(\sin^2(\varphi)^2\sin\varphi d\varphi = \int(1-\cos^2\varphi)^2\sin\varphi d\varphi$$

puis un changement de variable $u=\cos\varphi$*. Même chose pour* $\int\sin^4(\varphi)d\varphi$ *et* $\int\cos^4(\varphi)d\varphi$.

(4) On a $\Sigma_2 = S_1\cup S_2\cup S_3$ *et le flux de* $\mathbf{f}$ *à travers* Σ_2 *est la somme des flux de* $\mathbf{f}$ *à travers chaque surface* S_i*. On pour chaque* S_i *le vecteur normal est perpendiculaire à* S_i *en chaque point donc le flux à travers* S_i *est nul. Donc* $\iint_{\Sigma_2}\mathbf{f}\cdot dS = 0$.

(5) D'après la formule de la divergence

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\mathbf{f}\cdot dS &= \iiint_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{f})dxdydz = \iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz\\ &= 3\iiint_{[0,1]\times[0,\pi/2]^2} r^2\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \quad \textit{coord. sph.}\\ &= \frac{1}{5}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \boxed{\frac{3\pi}{10}}\end{aligned}$$

On retrouve bien $\iint_\Sigma\mathbf{f}\cdot dS = \iint_{\Sigma_1}\mathbf{f}\cdot dS + \iint_{\Sigma_1}\mathbf{f}\cdot dS = \frac{3\pi}{10}+0 = \frac{3\pi}{10}$

(6) Σ_1 *est le huitième de la sphère unité, son aire est donc* $\frac{1}{8}\times 4\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

(7) Σ_2 *est la réunion disjointe des 3 quarts de disque unité, son aire est donc* $\frac{3}{4}\times\pi = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

(8) Remarquons que la circulation le long de C *est égale à la somme des circulations sur le bord de chacunes des faces* S_1, S_2, S_3*. Sur les arrêtes droites, les circulations se compenses deux à deux*

(faire un dessin).
D'après la formule de Stokes, on a par exemple

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{f} \cdot dl = \iint_{S_1} \mathrm{rot}(\mathbf{f}) \cdot dS$$

Or $\mathrm{rot}(\mathbf{f}) = (0,0,0)$, *donc* $\int_{\partial S_1} \mathbf{f} \cdot dl = 0$. *Par symétrie* $\int_{\partial S_2} \mathbf{f} \cdot dl = 0$ *et* $\int_{\partial S_3} \mathbf{f} \cdot dl = 0$. *Ainsi* $\int_C \mathbf{f} \cdot dl = \boxed{0}$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ty' + y = 1. \qquad (1)$$

On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0 = 0$.

(1) On suppose que (1) admet une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de rayon de convergence strictement positif.

Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?

(2) Calculer explicitement a_n pour chaque n.

(3) Quel est le rayon de convergence de la série.

(4) Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

Réponse : Soit $R >$ *le rayon de convergence de la solution* $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. *On a pour* $t \in]-R, R[$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ ty'(t) &= t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ y''(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $t \in]-R, R[$

$$y''(t) + ty'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

avec

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n$$

Or $y''(t) + ty'(t) + y(t) = 1$. *Par unicité du développement en série entière, on obtient* $b_0 = 1$ *et* $b_n = 0$ *pour tout* $n \geq 1$. *Ce qui nous donne les relations*

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_0) \quad et \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2},\ \forall n \geq 1}$$

(2) De plus $a_0 = y(0) = 0$ *et que* $a_1 = y'(0) = 0$. *On en déduit que tous les termes impairs* a_{2n+1} *sont nums, puis que, pour les termes pairs*

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{-1}{2n}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{4}\right) a_2 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \\ &= \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}} \end{aligned}$$

valable pour $n \geq 1$.

(3) Daprès la règle de d'Alembert, le ryon de convergence de cette série est égal à $+\infty$. La fonction $y(t)$ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(4) On a

$$y(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} t^{2n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{-t^2}{2}\right)^n = \boxed{1 - e^{-t^2/2}}$$

Réciproquement, on vérifie assez facilement que cette fonction est solution de l'équation proposée.